Symetrie Lie a całkowalność nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych

Wiesław Zajiczek

Instytut Fizyki UJ
im. M. Smoluchowskiego w Krakowie

2 grudnia 2009

Plan seminarium

Motywacja

- Typowe podejście do równań zwyczajnych:
  - klasyfikacja
  - zgadywanie

Motywacja

- Typowe podejście do równań zwyczajnych:
  - klasyfikacja
  - zgadywanie
- Potrzeba bardziej systematycznych procedur - zwłaszcza dla równań nieliniowych,np.

$$y'' = 2\frac{y' + Cy'^{3/2} + y'^2}{y - x}$$

Motywacja

- Typowe podejście do równań zwyczajnych:
  - klasyfikacja
  - zgadywanie
- Potrzeba bardziej systematycznych procedur - zwłaszcza dla równań nieliniowych,np.

$$y'' = 2\frac{y' + Cy'^{3/2} + y'^2}{y - x}$$

- Jak wykorzystać istnienie symetrii, gdy równanie nie zostało uzyskane z Lagranżianu?

Motywacja

Sophus Lie

Ogólny schemat metody

POSZUKIWANIE SYMETRII $\longleftrightarrow$ GENERATOR(Y) SYMETRII

Ogólny schemat metody

POSZUKIWANIE SYMETRII $\longleftrightarrow$ GENERATOR(Y) SYMETRII

$\downarrow$ transf. zmiennych

POSTAĆ NORMALNA

Ogólny schemat metody

POSZUKIWANIE SYMETRII $\longleftrightarrow$ GENERATOR(Y) SYMETRII

$\downarrow$ transf. zmiennych

POSTAĆ NORMALNA

$\downarrow$

REZULTAT:
- obniżenie rzędu
- kwadratury

Grupy transformacji i ich generatory

Jednoparametrowa grupa Lie transformacji na $\mathbb{R}^2$

- $\tilde{x} = \tilde{x}(x, y, \epsilon), \tilde{y} = \tilde{y}(x, y, \epsilon)$
- transf odwracalne
- $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\epsilon}) = \tilde{\tilde{x}}(x, y, \tilde{\tilde{\epsilon}})$
- transf. identycznosciowa: $\tilde{x}(x, y, 0) = x, \tilde{y}(x, y, 0) = y$

Grupy transformacji i ich generatory

Jednoparametrowa grupa Lie transformacji na $\mathbb{R}^2$

- $\tilde{x} = \tilde{x}(x, y, \epsilon), \tilde{y} = \tilde{y}(x, y, \epsilon)$
- transf odwracalne
- $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\epsilon}) = \tilde{\tilde{x}}(x, y, \tilde{\tilde{\epsilon}})$
- transf. identycznosciowa: $\tilde{x}(x, y, 0) = x, \tilde{y}(x, y, 0) = y$

Przykład 1: grupa translacji:

$$\tilde{x} = x + \epsilon$$

$$\tilde{y} = y$$

Przykład2: grupa skalowania:

$$\tilde{x} = (1+\epsilon)x, \tilde{y} = (1+\epsilon)^2 y, -1 < \epsilon < \infty$$

Generator transformacji

- Transformacje infinitezymalne

$$\tilde{x}(x, y, \epsilon) = x + \epsilon\xi(x, y) + \cdots = x + \epsilon\mathbf{X}x + \cdots$$

$$\tilde{y}(x, y, \epsilon) = y + \epsilon\eta(x, y) + \cdots = y + \epsilon\mathbf{X}y + \cdots$$

- generator:

Generator transformacji

- Transformacje infinitezymalne

$$\tilde{x}(x, y, \epsilon) = x + \epsilon\xi(x, y) + \cdots = x + \epsilon\mathbf{X}x + \cdots$$

$$\tilde{y}(x, y, \epsilon) = y + \epsilon\eta(x, y) + \cdots = y + \epsilon\mathbf{X}y + \cdots$$

- generator:

$$\mathbf{X} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y, \;\; \text{gdzie}$$

$$\xi(x, y) = \frac{\partial\tilde{x}}{\partial\epsilon}(\epsilon = 0), \;\; \eta(x, y) = \frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon}(\epsilon = 0)$$

Generator transformacji

- Transformacje infinitezymalne

$$\tilde{x}(x, y, \epsilon) = x + \epsilon\xi(x, y) + \cdots = x + \epsilon\mathbf{X}x + \cdots$$

$$\tilde{y}(x, y, \epsilon) = y + \epsilon\eta(x, y) + \cdots = y + \epsilon\mathbf{X}y + \cdots$$

- generator:

$$\mathbf{X} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y, \text{ gdzie}$$

$$\xi(x, y) = \frac{\partial\tilde{x}}{\partial\epsilon}(\epsilon = 0), \ \ \eta(x, y) = \frac{\partial\tilde{y}}{\partial\epsilon}(\epsilon = 0)$$

- w dowolnych współrzędnych $\mathbf{X} = (\mathbf{X}x^i)\partial_i$

Odtwarzanie transformacji z generatora

- równania orbit:

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \epsilon} = \xi(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \epsilon} = \eta(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \tilde{x}(0) = x, \tilde{y}(0) = y$$

- formalne rozwiązanie

Odtwarzanie transformacji z generatora

- równania orbit:

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \epsilon} = \xi(\tilde{x}, \tilde{y}), \;\; \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \epsilon} = \eta(\tilde{x}, \tilde{y}), \;\; \tilde{x}(0) = x, \tilde{y}(0) = y$$

- formalne rozwiązanie

$$\tilde{\mathbf{r}} = \exp(\epsilon \mathbf{X})\mathbf{r}, \;\; \text{gdzie} \;\; \mathbf{r} = (x, y)$$

Symetrie

- Funkcje niezmiennicze
  Działanie transformacji na funkcje $F(x, y)$:

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = e^{\epsilon \mathbf{X}} F(x, y)$$

Symetrie

- Funkcje niezmiennicze
  Działanie transformacji na funkcje $F(x, y)$:

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = e^{\epsilon \mathbf{X}} F(x, y)$$

Def: F - niezmiennicza $\Leftrightarrow F(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv F(x, y)$

Symetrie

- Funkcje niezmiennicze
  Działanie transformacji na funkcje $F(x, y)$:

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = e^{\epsilon \mathbf{X}} F(x, y)$$

Def: F - niezmiennicza $\Leftrightarrow F(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv F(x, y)$

Tw. $F(x, y)$- niezmiennicza względem $\mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{X} F(x, y) = 0$

Symetrie

- Funkcje niezmiennicze
  Działanie transformacji na funkcje $F(x, y)$:

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = e^{\epsilon \mathbf{X}} F(x, y)$$

  Def: F - niezmiennicza $\Leftrightarrow F(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv F(x, y)$

  Tw. $F(x, y)$- niezmiennicza względem $\mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{X} F(x, y) = 0$

- Jak uogólnić niezmienniczość na równanie różniczkowe $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$?

Prolongacja generatora

- działanie transformacji na pochodne $y', \cdots, y^{(n)}$

$$\tilde{y}' = y' + \epsilon\eta'(x, y, y') + \cdots = y' + \epsilon \mathbf{X} y' + \cdots$$

$$\tilde{y}^{(n)} = y^{(n)} + \epsilon\eta^{n}(x, y, y', ..., y^{(n)}) + \cdots = y^{(n)} + \epsilon \mathbf{X} y^{(n)} + \cdots$$

Prolongacja generatora

- działanie transformacji na pochodne $y', \cdots, y^{(n)}$

$$\tilde{y}' = y' + \epsilon\eta'(x, y, y') + \cdots = y' + \epsilon\mathbf{X}y' + \cdots$$

$$\tilde{y}^{(n)} = y^{(n)} + \epsilon\eta^{n}(x, y, y', ..., y^{(n)}) + \cdots = y^{(n)} + \epsilon\mathbf{X}y^{(n)} + \cdots$$

$$\eta' = \frac{\partial\tilde{y}'}{\partial\epsilon}(\epsilon = 0), \cdots, \eta^{(n)} = \frac{\partial\tilde{y}^{(n)}}{\partial\epsilon}(\epsilon = 0)$$

Prolongacja generatora

- rozszerzony generator:

$$\mathbf{X}^{(n)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \eta^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}},$$

gdzie

$$\eta' = \frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}x} - y' \frac{\mathrm{D}\xi}{\mathrm{D}x}$$

$$\eta^{(n)} = \frac{\mathrm{D}\eta^{(n-1)}}{\mathrm{D}x} - y^{(n)} \frac{\mathrm{D}\xi}{\mathrm{D}x}$$

Symetrie równań różniczkowych

- Def. Jednoparametrowa grupa transformacji jest symetrią równania różniczkowego $F(x, y, ..., y^{(n)}) = 0$, jeśli odwzorowuje rozwiązania w rozwiązania, tzn. jeśli obraz $\tilde{y}(\tilde{x})$ dowolnego rozwiązania $y(x)$ jest rozwiązaniem $F = 0$

Symetrie równań różniczkowych

- Def. Jednoparametrowa grupa transformacji jest symetrią równania różniczkowego $F(x, y, ..., y^{(n)}) = 0$, jeśli odwzorowuje rozwiązania w rozwiązania, tzn. jeśli obraz $\tilde{y}(\tilde{x})$ dowolnego rozwiązania $y(x)$ jest rozwiązaniem $F = 0$
- W dalszej częśći zakładamy, że równanie ma postać:

$$y^{(n)} - \omega(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = 0$$

- Infinitezymalne kryterium symetrii r.r. względem transformacji $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X}^{(n)}(y^{(n)} - \omega(x, y, y', ..., y^{(n-1)})) = 0, \text{czyli}$$

$$\mathbf{X}^{(n-1)}\omega = \eta^{(n)}$$

Jak znaleźć symetrie?

- Warunek $\mathbf{X}^{(n-1)}\omega = \eta^{(n)}$ dostarcza **systematycznego!** sposobu wyznaczenia współrzędnych genaratora(-rów) symetrii.
- Przykład: $n = 2$. Warunek istnienia symetrii w jawnej postaci:

$$\omega(\eta_y - 2\xi_{,x} - 3y'\xi_{,y}) - \omega_{,x}\xi - \omega_{,y}\eta - \omega_{,y'}[\eta_{,x} + y'(\eta_{,y} - \xi_{,x}) - y'^2\xi_{,y}]$$

$$+\eta_{,xx} + y'(2\eta_{,xy} - \xi_{,xx}) + y'^2(\eta_{,yy} - 2\xi_{,xy}) - y'^3\xi_{,yy} = 0$$

Postać normalna generatora

- Współrzędne dopasowane do grupy transformacji

$$\tilde{x} = t(x, y), \quad \tilde{y} = s(x, y), \quad \mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial s}$$

$$\mathbf{X}s = \xi(x, y)s_{,x} + \eta(x, y)s_{,y} = 1$$

$$\mathbf{X}t = \xi(x, y)t_{,x} + \eta(x, y)t_{,y} = 0$$

Postać normalna generatora

- Współrzędne dopasowane do grupy transformacji

$$\tilde{x} = t(x,y), \;\; \tilde{y} = s(x,y), \;\; \mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial s}$$

$$\mathbf{X}s = \xi(x,y)s_{,x} + \eta(x,y)s_{,y} = 1$$

$$\mathbf{X}t = \xi(x,y)t_{,x} + \eta(x,y)t_{,y} = 0$$

- Wybór współrzędnych nie jest jednoznaczny:

$$s \rightarrow s + s_0(t), \;\; t \rightarrow f(t)$$

Obniżanie rzędu równania

- W nowych współrzędnych równanie $y^{(n)} - \omega(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = 0$ ma postać: $s^{(n)} - \tilde{\omega}(t, s, s', ..., s^{(n-1)}) = 0$

Obniżanie rzędu równania

- W nowych współrzędnych równanie $y^{(n)} - \omega(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = 0$ ma postać: $s^{(n)} - \tilde{\omega}(t, s, s', ..., s^{(n-1)}) = 0$
- Warunek symetrii:

$$\mathbf{X}\tilde{\omega} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial s} = 0$$

prowadzi do

$$s^{(n)} - \tilde{\omega}(t, s', ..., s^{(n-1)}) = 0$$

Obniżanie rzędu równania

- Przykład 1. Równanie w zagadnieniu ugięcia promienia świetlnego w metryce Schwarzschilda

$$y'' = -y + 3y^2$$

$$\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x}$$

Zamiana zmiennych: $x = s(t), y = t$

Obniżanie rzędu równania

- Przykład 1. Równanie w zagadnieniu ugięcia promienia świetlnego w metryce Schwarzschilda

$$y'' = -y + 3y^2$$

$$\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x}$$

Zamiana zmiennych: $x = s(t), y = t$ Przedstawienie równania w nowych zmiennych:

$$-s'' = (s')^3(3t^2 - t)$$

sprowadza problem znalezienia rozwiązań do kwadratur:

$$s'(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{-t^2 + 2t^3 + C}}$$

Obniżanie rzędu równania

- Przykład 2. Równanie Lane-Emdena

$$y'' + 2\frac{y'}{x} + y^n = 0$$

Obniżanie rzędu równania

- Przykład 2. Równanie Lane-Emdena

$$y'' + 2\frac{y'}{x} + y^n = 0$$

Symetria skalowania:

$$\mathbf{X} = x\partial_x - \frac{2}{n-1} y\partial_y$$

$$\tilde{x} = x \cdot e^{\epsilon}, \tilde{y} = y \cdot e^{-\frac{2\epsilon}{n-1}}, \quad \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}^{-\frac{2}{n-1}}} = \frac{y}{x^{-\frac{2}{n-1}}}$$

Współrzędne dopasowane do symetrii:

$$t(x,y) = \frac{y}{x^{-\frac{2}{n-1}}}, \;\; s(y,t) = \frac{n-1}{-2}\int \frac{dy}{y} = \ln(y^{\frac{n-1}{-2}}) = s(y)$$

Równanie Lane-Emdena

Współrzędne dopasowane do symetrii:

$$t(x,y) = \frac{y}{x^{-\frac{2}{n-1}}}, \quad s(y,t) = \frac{n-1}{-2}\int \frac{dy}{y} = \ln(y^{\frac{n-1}{-2}}) = s(y)$$

$\left(16t^{3-n}n - 8t^{3-n} - 8t^{3-n}n^2\right)\frac{d^2}{dt^2}s\left(t\right) + \left(8t^3 + 8t^3n^2 + 48t^{4-n} - 16t^{4-n}n - 16t^3n\right)\left(\frac{d}{dt}s\left(t\right)\right)^3 + (-36t^2n^2 + 48t^{3-n}n + 36t^2n - 12t^2 - 16t^{3-n}n^2 - 32t^{3-n} + 12n^3t^2)\left(\frac{d}{dt}s\left(t\right)\right)^2 + (6t - 4t^{2-n} - 24n^3t + 4t^{2-n}n - 24tn + 4t^{2-n}n^2 + 6n^4t + 36tn^2 - 4n^3t^{2-n})\frac{d}{dt}s\left(t\right) - 1 + 5n - 10n^2 + 10n^3 - 5n^4 + n^5 = 0$

Kiedy symetrie pozwalają sprowadzić równanie do kwadratur?

- Przestrzeń generatorów symetrii danego równania różniczkowego tworzy algebrę Lie:

Kiedy symetrie pozwalają sprowadzić równanie do kwadratur?

- Przestrzeń generatorów symetrii danego równania różniczkowego tworzy algebrę Lie: Jeżeli

$$\mathbf{X}_1 = \xi_1 \partial_x + \eta_1 \partial_y, \;\; \mathbf{X}_2 = \xi_2 \partial_x + \eta_2 \partial_y$$

  są generatorami symetrii,

Kiedy symetrie pozwalają sprowadzić równanie do kwadratur?

- Przestrzeń generatorów symetrii danego równania różniczkowego tworzy algebrę Lie: Jeżeli

  $$\mathbf{X}_1 = \xi_1 \partial_x + \eta_1 \partial_y, \ \ \mathbf{X}_2 = \xi_2 \partial_x + \eta_2 \partial_y$$

  są generatorami symetrii,to także ich komutator:

  $$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = (\mathbf{X}_1(\xi_2) - \mathbf{X}_2(\xi_1))\partial_x + (\mathbf{X}_1(\eta_2) - \mathbf{X}_2(\eta_1))\partial_y$$

- $[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = C^c_{ab} \mathbf{X}_c$

Kiedy symetrie pozwalają sprowadzić równanie do kwadratur?

Odpowiedź na powyższe pytanie i sposób upraszczania równania zależą od:

- rzędu grupy symetrii

Kiedy symetrie pozwalają sprowadzić równanie do kwadratur?

Odpowiedź na powyższe pytanie i sposób upraszczania równania zależą od:

- rzędu grupy symetrii
- algebry Lie grupy symetrii (od stałych struktury)

Kiedy symetrie pozwalają sprowadzić równanie do kwadratur?

Odpowiedź na powyższe pytanie i sposób upraszczania równania zależą od:

- rzędu grupy symetrii
- algebry Lie grupy symetrii (od stałych struktury)
- tranzytywności grupy symetrii w przestrzeni rozwiązań

Równania rzędu 2 z grupą G_2

Sposób postępowania po znalezieniu grupy (ew. podgrupy) symetrii G_2

- Sprawdzamy, czy grupa jest abelowa

Równania rzędu 2 z grupą G_2

Sposób postępowania po znalezieniu grupy (ew. podgrupy) symetrii G_2

- Sprawdzamy, czy grupa jest abelowa
- Sprawdzamy tranzytywność działania grupy:

$$\delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

Równania rzędu 2 z grupą G_2

Sposób postępowania po znalezieniu grupy (ew. podgrupy) symetrii G_2

- Sprawdzamy, czy grupa jest abelowa
- Sprawdzamy tranzytywność działania grupy:

$$\delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

- Sprowadzamy generatory do postaci kanonicznej, uwzględniając:

$$s \to s + s_0(t), \quad t \to f(t)$$

Równania rzędu 2 z grupą G_2

$G_2\mathrm{I}$: $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0$	Ia, $\delta \neq 0$	$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial t}$	$s'' = \hat{\omega}(s')$
	Ib, $\delta = 0$	$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \mathbf{X}_2 = t\frac{\partial}{\partial s}$	$s'' = \hat{\omega}(t)$
$G_2\mathrm{II}$: $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_1$	IIa, $\delta \neq 0$	$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \mathbf{X}_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + s\frac{\partial}{\partial s}$	$s'' = \frac{\hat{\omega}(s')}{t}$
	IIb, $\delta = 0$	$\mathbf{X}_1 = \frac{\partial}{\partial s}, \mathbf{X}_2 = s\frac{\partial}{\partial s}$	$s'' = s'\hat{\omega}(t)$

Równania rzędu 2 z grupą G_2

Przykład: Równanie na czynnik skali w kosmologii FLRW z $p = 0$:

$$2\frac{y''}{y} + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{k}{y^2} = 0$$

Równania rzędu 2 z grupą G_2

Przykład: Równanie na czynnik skali w kosmologii FLRW z $p = 0$:

$$2\frac{y''}{y} + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{k}{y^2} = 0$$

- Grupa symetrii

$$\mathbf{X}_1 = \partial_x, \;\; \mathbf{X}_2 = x\partial_x + y\partial_y$$

Równania rzędu 2 z grupą G_2

Przykład: Równanie na czynnik skali w kosmologii FLRW z $p = 0$:

$$2\frac{y''}{y} + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{k}{y^2} = 0$$

- Grupa symetrii

$$\mathbf{X}_1 = \partial_x, \ \ \mathbf{X}_2 = x\partial_x + y\partial_y$$

- Algebra Lie

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_1, \quad \delta = y \neq 0$$

Równania rzędu 2 z grupą G_2

Transformacja do współrzędnych, w których generatory są w postaci kanonicznej:

$$x = s(t), y = t$$

$$\mathbf{X}_1 = \partial_s, \;\; \mathbf{X}_2 = s\partial_s + t\partial_t$$

Równania rzędu 2 z grupą G_2

Transformacja do współrzędnych, w których generatory są w postaci kanonicznej:

$$x = s(t), y = t$$

$$\mathbf{X}_1 = \partial_s, \ \ \mathbf{X}_2 = s\partial_s + t\partial_t$$

Równanie w nowych zmiennych:

$$s'' = \frac{\frac{1}{2}s'(1 + k \cdot (s')^2)}{t}$$

Sprowadzone do kwadratur.

Bibliografia

1. G.Bluman, S.Kumei, *Symmetries and differential equations*, Springer,NY 1989
2. H.Stephani, *Differential equations. Their solution using symmetries*, Cambridge University Press, NY 1989
3. N.Ibragimov, *Selected works, Vol.1*,ALGA Publications, Karlskrona 2006